

«Ни одно человеческое исследование не может считаться истинной наукой, если оно не прошло через математические доказательства.

Никакой достоверности нет в науках там, где нельзя приложить ни одну из математических наук, и в том, что не имеет связи с математикой».

Леонардо да Винчи

Введение

Математика (от др.-греч. — μάθημα
— изучение, наука)

является точной абстрактной
наукой, изучающей
количественные соотношения и
пространственные формы.

Точность математики означает, что основным методом в математических исследованиях являются логические рассуждения, а результаты исследования формулируются в строгой логической форме.

Абстрактность математики означает, что объектами ее изучения являются математические модели.

«У людей, усвоивших великие принципы математики, одним органом чувств больше, чем у простых смертных».

Ч. Дарвин

«Высшее назначение математики — находить порядок в хаосе, который нас окружает.»

Н. Винер

Гл. 1 Элементы линейной алгебры

§1. Матрицы

1.1. Основные понятия

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая **m** строк одинаковой длины (или **n** столбцов одинаковой длины)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A = \left(a_{ij} \right) \quad i = \overline{1, m} ; j = \overline{1, n} \quad A_{m \times n}$$

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}$$

$m=n$ – *A-квадратная матрица*

$A_{n \times n}$ – *матрица n – го порядка*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Единичная матрица

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

нулевая матрица

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей **транспонированной** к данной и обозначается A^T .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^T\right)^T = A$$

1.2. Действия над матрицами

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}), \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}$$

Сложение матриц

$$C = A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Умножение матрицы на число λ

$$C = \lambda A = (\lambda a_{ij})$$

1. $A + B = B + A$

2. $A + (B + C) = (A + B) + C$

3. $A + O = A$

4. $A - A = O$

5. $1 \cdot A = A$

6. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

7. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

8. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

Элементарные преобразования матриц

Строки и столбцы будем называть **рядами**

- перестановка местами двух параллельных рядов матрицы
- умножение всех элементов ряда матрицы на число, не равное нулю
- прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число

Матрицы A и B **эквивалентны**, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований

$$A \sim B$$

При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю.

Пример 1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\square \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \square$$

$$\square \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Произведение матриц

$$A_{m \times p} = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}, \quad B_{p \times n} = \begin{pmatrix} b_{ij} \end{pmatrix}$$

$$C_{m \times n} = A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{ij} \end{pmatrix}$$

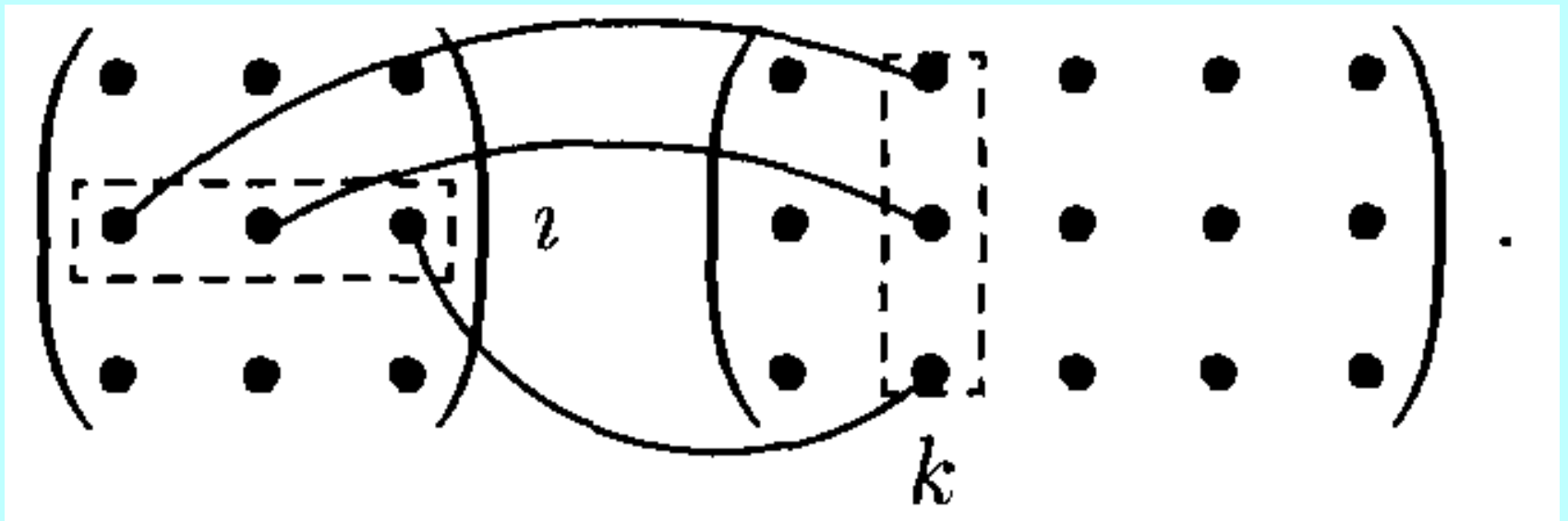
$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj},$$

$$i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$$

т.е. элемент c_{ij} равен сумме
произведений элементов i -ой строки
матрицы A на соответствующие
элементы j -го столбца матрицы B

Получение элемента c_{ik}

схематично можно изобразить так



Пример 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$A \cdot B$ — не определено

$$\begin{aligned} B \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 10 & 10 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

$A \cdot B = B \cdot A$ – A и B *перестановочны*

$$1) A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

$$2) A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$3) (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$4) \alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B$$

§2. Определители

$$A_{n \times n} \quad \det A \left(|A|, \Delta \right)$$

Определитель (детерминант)

$$1. \quad n = 1 \quad A = (a_{11}) \quad \det A = \Delta_1 = a_{11}$$

$$2. \quad n = 2 \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

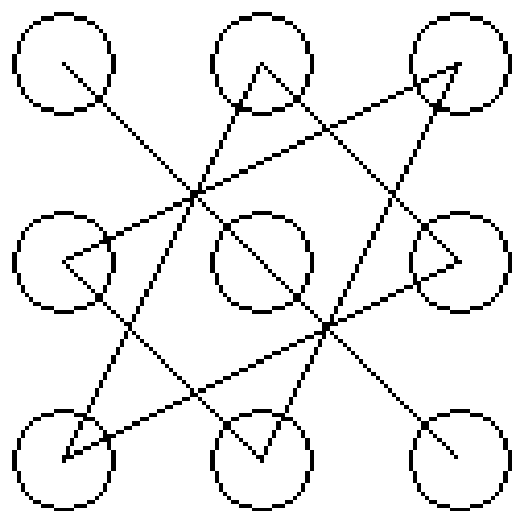
$$3. \quad n = 3 \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

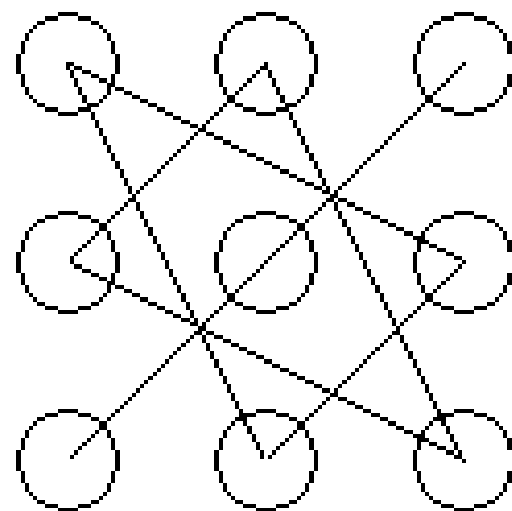
$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$$

$$- a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}$$

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix}$$



$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$



Правило треугольника или
правило Сарруса

Пример 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 2 + 3 = 5$$

Пример 2. $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 - \\ - 1 \cdot 1 \cdot 6 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4) \cdot 5 =$$

$$= -15 + 48 - 6 - 18 = 9$$

2.1 Свойства определителей

1. Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, причем каждую строку столбцом с тем же номером, и наоборот

$$|A| = |A^T|$$

2. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак
3. Определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю

4. Общий множитель элементов какого-либо ряда *определителя матрицы* можно вынести за знак *определителя*

Следствие из свойств 3,4.

Если все элементы некоторого ряда (строки или столбца) пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то такой *определитель матрицы* равен нулю

5. Если все элементы какой–либо строки или столбца *определителя* представлены в виде суммы 2-х слагаемых, то *определитель матрицы* можно представить в виде суммы 2-х *определителей* по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} + a''_{31} & a'_{32} + a''_{32} & a'_{33} + a''_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a''_{31} & a''_{32} & a''_{33} \end{vmatrix}$$

6. Если к какой–либо строке (или столбцу) *определителя* прибавить соответствующие элементы другой (или столбца), умноженные на одно и тоже число, то *определитель матрицы* не изменит своей величины

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + k a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + k a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + k a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Минором некоторого элемента a_{ij}
определителя n -го порядка
называется определитель $(n-1)$ -го
порядка, полученный

из исходного путем вычеркивания
строки и столбца, на пересечении
которых находится выбранный
элемент

Минор элемента a_{ij}

m_{ij}

Алгебраическое дополнение
элемента a_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}$$

7. Теорема Лапласа (Разложение определителя по элементам некоторого ряда)

Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

8. Сумма произведений элементов
какого-либо ряда определителя
на алгебраические дополнения
соответствующих элементов
параллельного ряда равна нулю.

$$a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + a_{13} \cdot A_{23} = 0$$

9. $\det(A \pm B) = \det A \pm \det B$

10. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

Пример 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 18 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

$$\det B = |B| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 13$$

$$\det A \cdot \det B = 13 \cdot (-2) = -26$$

$$\det(A \cdot B) = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{vmatrix} = 7 \cdot 18 - 8 \cdot 19 = 126 - 152 = -26$$

$$\det(B \cdot A) = \begin{vmatrix} 11 & 18 \\ 10 & 14 \end{vmatrix} = 11 \cdot 14 - 18 \cdot 10 = 154 - 180 = -26$$

Пример 4.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

1 способ

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 0 \cdot 1 + (-3) \cdot (-3) \cdot 5 + 4 \cdot (-1) \cdot 1 -$$

$$-1 \cdot 0 \cdot 5 - 4 \cdot (-3) \cdot 1 - (-3) \cdot (-1) \cdot 2 =$$

$$= 45 - 4 + 12 - 6 = 47$$

2 способ

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 19 - 10 = 47$$

Пример 5.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = ?$$

§3. Обратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\Delta = \det A \neq 0$ A – невырожденная матрица

$\Delta = \det A = 0$ A – вырожденная матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица A^* - союзная к матрице A

Матрица A^{-1} - обратная матрице A

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Теорема 3.1 Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

Доказательство. $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, 3}$

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} =$$

$$= \det A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det A \cdot E$$

$$A \cdot A^* = \det A \cdot E$$

$$A^* \cdot A = \det A \cdot E$$

$$A \cdot \frac{A^*}{\det A} = E \qquad \frac{A^*}{\det A} \cdot A = E$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Свойства обратной матрицы

$$1) \left(\det A^{-1} \right) = \frac{1}{\det A}$$

$$2) \left(A \cdot B \right)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$3) \left(A^{-1} \right)^T = \left(A^T \right)^{-1}$$

Пример 1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ A^{-1} — ?

$$\det A = 5 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists A^{-1}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} + \frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5} + \frac{1}{5} & \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Пример 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} \text{ — ?}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3.1. Ранг матрицы

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$k \leq \min(m, n)$$

Если в матрице A выделить k произвольных строк и столбцов, то определитель, составленный из элементов, расположенных на пересечении этих строк и столбцов называется **минором** порядка k матрицы A .

Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется **рангом матрицы**.

$$r, r(A), \text{rang } A$$

Базисный минор – минор, порядок которого определяет ранг матрицы.

Свойства ранга

1. $r(A) = r(A^T)$
2. Если из матрицы вычеркнуть нулевой ряд, то ранг не изменится
3. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы

Пример 3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_3 = 0 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0 \Rightarrow$$

$$r(A) = 2$$

Пример 4. Определить
ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \square$$

$$\square \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\square \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$$r(A) = 2$$

§4. Системы линейных уравнений

4.1. Матричный метод решения систем линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right. \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \det A \neq 0$$

$$A \cdot X = B$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow$$

$$X = A^{-1} \cdot B \quad (2)$$

Пример 1.

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 5(4-9) + 1(2-12) - 1(3-8) = -25 - 10 + 5 =$$

$$= -30$$

$$m_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$m_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$m_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$m_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10; \quad m_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \quad m_{32} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16;$$

$$m_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5; \quad m_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 19; \quad m_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

$$A_{11} = -5, \quad A_{21} = -1, \quad A_{31} = -1, \quad A_{12} = 10, \quad A_{22} = 14,$$

$$A_{32} = -16, \quad A_{13} = -5, \quad A_{23} = -19, \quad A_{33} = 11$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-30} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25 + 10 - 5 & 5 + 14 - 19 & 5 - 16 + 11 \\ 5 - 20 + 15 & 1 - 28 + 57 & 1 + 32 - 33 \\ 20 - 30 + 10 & 4 - 42 + 38 & 4 + 48 - 22 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x = 1; y = 2; z = 3$$

4.2. Метод Крамера.

(Габриель Крамер (1704-1752)
швейцарский математик)

$$A \cdot X = B \quad \Delta = \det A \neq 0$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11} \cdot b_1 + A_{21} \cdot b_2 + \dots + A_{n1} \cdot b_n}{\Delta} \\ \frac{A_{12} \cdot b_1 + A_{22} \cdot b_2 + \dots + A_{n2} \cdot b_n}{\Delta} \\ \Delta \\ \dots \\ \frac{A_{1n} \cdot b_1 + A_{2n} \cdot b_2 + \dots + A_{nn} \cdot b_n}{\Delta} \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \quad (3)$$

формулы Крамера

Определитель Δ_i получен из Δ путем замены i -го столбца коэффициентов столбцом B из свободных членов

Вывод: невырожденная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение, которое может быть найдено либо матричным способом (2) либо по формулам Крамера (3)

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 5(4 - 9) + (2 - 12) - (3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 - 48) - (42 - 32) = -20 - 10 = -30$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 - 48) - (16 - 56) = -100 + 40 = -60.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 3$$