# §5. Предел функции

## 5.1. Предел функции в точке

$$y = f(x) \qquad x \in \overset{0}{U}(x_0, \delta)$$

Определение 1. (на «языке последовательностей», или по Гейне).

Число *A* называется ***пределом функции*** *f*(*x*) в точке $x_0$ (или при $x \to x_0$),

если $\forall \{x_n\} (x_n \neq x_0), \qquad x_n \to x_0$

$$\forall \{ x_n \} (x_n \neq x_0), \qquad x_n \to x_0$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right) = A \quad ,$$

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right) = A$$

$$f\left(x\right) \to A \text{ при } x \to x_0$$

## Определение 2 (на «языке ε–δ», или по Коши).

Число *A* называется *пределом* функции *f*(*x*) в точке $x_0$ (или при $x \to x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$

выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon.$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

$$\left( \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \quad \forall x: \; 0 < \left| x - x_0 \right| < \delta \;\Rightarrow\right.$$

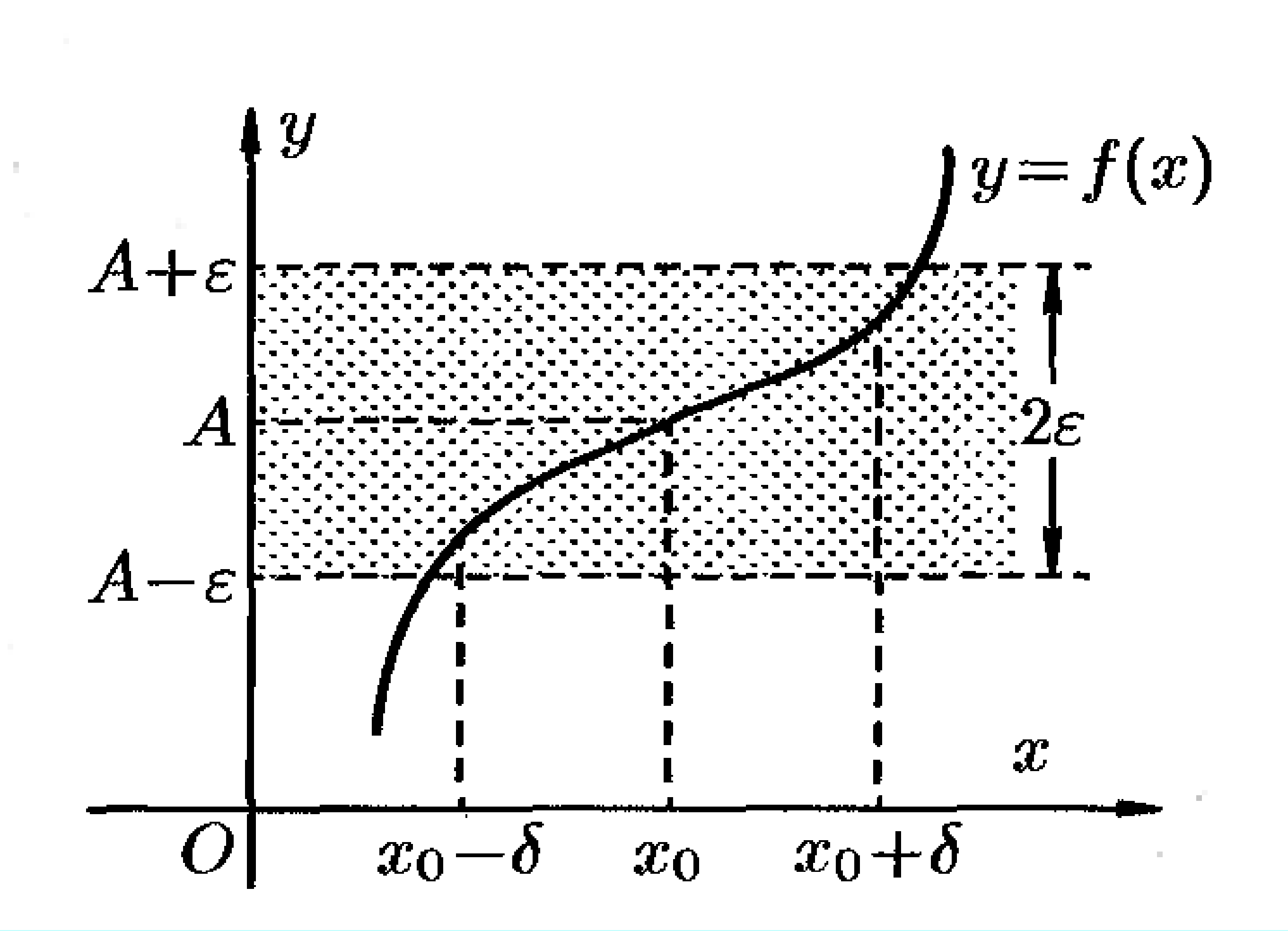
$$\left. \left| f(x) - A \right| < \varepsilon \right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Теорема 1. Определения предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны.

# Геометрический смысл предела функции

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$



Пример 1. $\lim_{x\to 2}(3x-2)=4$

$$\left|(3x-2)-4\right| = \left|3x-6\right| = 3\left|x-2\right| < \varepsilon$$

$$\left|x-2\right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \delta = \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left|x-2\right| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|(3x-2)-4\right| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to 2}(3x-2)=4$$

# 5.2. Односторонние пределы

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

Определение 3.

Число $A_1$ называется *пределом* функции $y=f(x)$ слева в точке $x_0$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что при $x_0-\delta < x < x_0$, выполняется неравенство

$$|f(x)-A_1| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A_1 \qquad f(x_0-0) = A_1$$

Определение 4 (предел функции справа).

$$\Big( \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x: \ x_0 < x < x_0 + \delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \left| f(x) - A_2 \right| < \varepsilon \Big) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$$

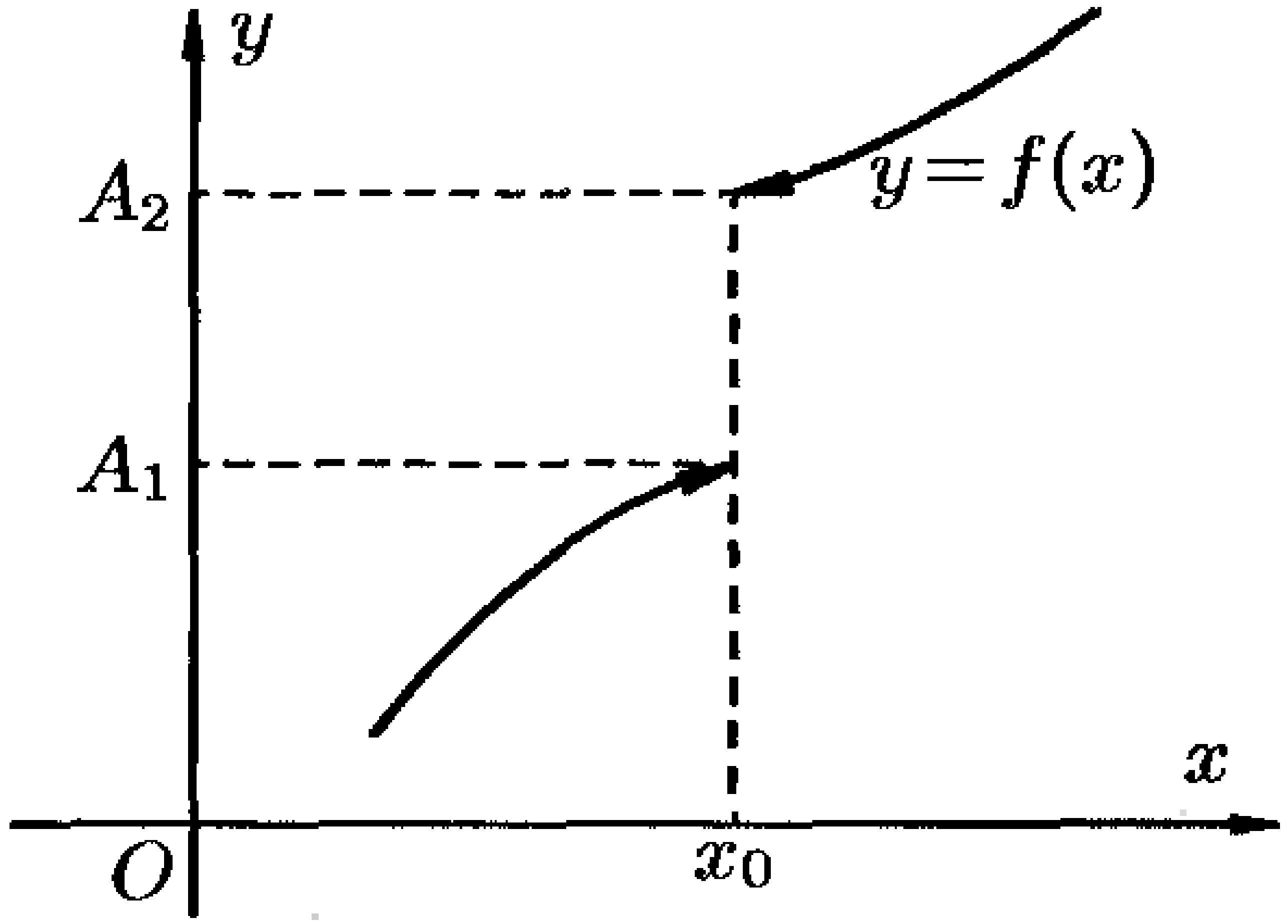
$$f(x_0 + 0) = A_2$$

Пределы функции слева и справа называются *односторонними* пределами

Теорема 3. $$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$$

$$A_1 \neq A_2 \quad \Rightarrow \quad \textit{не существует} \quad \lim_{x \to x_0} f(x)$$


y
$y=f(x)$
$A_2$
$A_1$
x
O
$x_0$

# 5.3. Предел функции при $x \to \infty$

Определение 4. Число А называется **пределом** функции f(x) при $x \to \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что для всех x, $|x| > M$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = A$$

# 5.4. Бесконечно большая функция (б.б.ф.)

Функция y=f(x) называется *бесконечно большой* при $x \to x_0$ , если

$$\left( \forall M > 0 \; \exists \delta > 0 \;\; \forall x: \;\; 0 < \left| x - x_0 \right| < \delta \;\; \Rightarrow \right.$$

$$\left. \left| f(x) \right| > M \right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

$$y=\frac{1}{x-3}$$ б.б.ф. при $x\to 3$

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=-\infty$$

Функция y=f(x) называется *бесконечно большой* при $x\to\infty$, если

$$\left(\ \forall M>0\ \exists N>0\ \ \forall x:\ \ \left|x\right|>N\ \Rightarrow\right.$$

$$\left.\left|f\left(x\right)\right|>M\right)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=\infty$$

# §6. Бесконечно малые функции (Б.М.Ф.)

## 6.1. Определения и основные теоремы

Определение 1. Функция f(x) называется ***бесконечно малой*** при $x \to x_0$, если

.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

Аналогично определяется б.м.ф. при

$x \to x_0 - 0,\ x \to x_0 + 0\ ,\ x \to -\infty,\ x \to +\infty\ :$

$$\boxed{f(x) \to 0}$$

Примеры: $y = x^2\ ,\ x \to 0$

$y = x^2 - 9,\ x \to 3$ $\qquad y = \dfrac{1}{x},\ x \to \infty$

# Свойства бесконечно малых функций:

Теорема 1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций при $x \to x_0$ есть бесконечно малая функция при $x \to x_0$ .

$$\alpha(x),\ \beta(x) - \textit{б.м.ф.}\ \ \textit{при}\ \ x \to x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0\ \ \forall x:\ \ 0 < \left|x - x_0\right| < \delta_1\ \ \Rightarrow\right.$$

$$\left.\left|\alpha(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\lim_{x \to x_0} \beta(x) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left( \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2 > 0 \ \ \forall x: \ \ 0 < \left| x - x_0 \right| < \delta_2 \ \ \Rightarrow \right.$$

$$\left. \left| \beta\left(x\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

$$\delta = \min\left(\delta_1, \delta_2\right) \qquad \forall x: \ \ 0 < \left| x - x_0 \right| < \delta \quad \Rightarrow$$

$$\left| \alpha\left(x\right) + \beta\left(x\right) \right| \le \left| \alpha\left(x\right) \right| + \left| \beta\left(x\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ \ \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} \left( \alpha(x) + \beta(x) \right) = 0 \Rightarrow$$

$\alpha\left(x\right) + \beta\left(x\right)$ – *б.м.ф. при* $x \to x_0$

Теорема 2. Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки $x = x_0$ является бесконечно малой функцией при $x \to x_0$.

$$f(x) - \textit{ограничена} \;\; при \;\; x \to x_0$$

$$\forall x : |x - x_0| < \delta_1 \quad \Rightarrow \qquad |f(x)| \le M$$

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left( \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_2 > 0 \quad \forall x : \;\; 0 < |x - x_0| < \delta_2 \quad \Rightarrow \right.$$

$$\left. |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \right)$$

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2) \quad \forall x: \; 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow$$

$$|f(x) \cdot \alpha(x)| = |f(x)| \cdot |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \alpha(x) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$f(x) \cdot \alpha(x) - \text{б.м.ф. } \textit{при } x \to x_0$$

Следствие 1. Произведение двух б.м.ф. есть функция бесконечно малая.

Теорема 3. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю есть функция бесконечно малая.

Теорема 4. Если функция $\alpha(x)$ – бесконечно малая, то функция $1/\alpha(x)$ есть бесконечно большая и наоборот:

если функция $f(x)$ – бесконечно большая, то

$1/f(x)$ есть бесконечно малая функция.

## 6.2. Связь между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией

Теорема 5. *Для того, чтобы функция $f(x)$ при $x \to x_0$ имела предел, равный A,*

*необходимо и достаточно, чтобы вблизи точки $x = x_0$ выполнялось*

*условие*

$$f(x) = A + \alpha(x)$$

*где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$ ($\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$).*

# 6.3. Основные теоремы о пределах

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = B$$

**Теорема 6.** Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \xrightarrow{T5} f(x) = A + \alpha(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = B \xrightarrow{T5} g(x) = A + \beta(x)$$

$$f(x)+g(x)=A+B+\left(\alpha(x)+\beta(x)\right)$$

$$\alpha(x)+\beta(x)$$

– Б.М.Ф. , следовательно по Т5

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=A+B$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x)$$

Теорема 7. Функция может иметь только один предел при $x \to x_0$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = B$$

$$0 = \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x)) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} f(x) = A - B$$

$$A - B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = B$$

Теорема 8. Предел произведения двух функций равен произведению их пределов

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \xrightarrow{T5} f(x) = A+\alpha(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = B \xrightarrow{T5} g(x) = B+\beta(x)$$

$$f(x)\cdot g(x) = \left(A+\alpha(x)\right)\cdot\left(B+\beta(x)\right)$$

$$f(x)\cdot g(x)=AB+\left(A\cdot\beta(x)+B\cdot\alpha(x)+\alpha(x)\cdot\beta(x)\right)$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)}$$

Следствие.

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}C\cdot f(x)=C\cdot\lim_{x\to x_0}f(x)}$$

Теорема 9. Предел частного равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}\qquad\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0\right)$$

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,\infty-\infty$$

– неопределенности

## Пример 1. $\lim\limits_{x\to 2}\left(2x^2-3x+5\right)$

$$\lim_{x\to 2}\left(2x^2-3x+5\right)=\lim_{x\to 2}2x^2-\lim_{x\to 2}3x+\lim_{x\to 2}5=$$

$$=2\left(\lim_{x\to 2}x\right)^2-3\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}5=2\cdot 4-3\cdot 2+5=7$$

Пример 2. $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-4}{x-6}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-6x^2+11x-6}{4x^3-3x+2}$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{6}{x}+\dfrac{11}{x^2}-\dfrac{6}{x^3}}{4-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{6}{x}+\dfrac{11}{x^2}-\dfrac{6}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)}=\frac{3}{4}$$

**Теорема 10.** Если функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ имеют одну область определения $D$ и

$$\forall x \in D \quad f(x) \le g(x) \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \le \lim_{x \to x_0} \varphi(x)$$

## Теорема 11 (о пределе промежуточной функции).

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = A$$

$$f(x) \le \varphi(x) \le g(x) \quad \Rightarrow \qquad \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A$$