Теорема 10. Если функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ имеют одну область определения D и

$$\forall x \in D \quad f(x) \leq \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} \varphi(x)$$

Теорема 11 (о пределе промежуточной функции).

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = A$$

$$f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A$$

6.4. Замечательные пределы

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \quad ,$$

$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$$

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{x^n(a_0 + \frac{a_1}{x} + ... + \frac{a_n}{x^n})}{x^m(b_0 + \frac{b_1}{x} + ... + \frac{b_m}{x^m})} =$$

$$= x^{n-m} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + ... + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + ... + \frac{b_m}{x^m}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_m}{x^m}}=\frac{a_0}{b_0}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}0, & npu \quad n<m\\ \frac{a_0}{b_0}, & npu \quad n=m\\ \infty, & npu \quad n>m\end{cases}$$

Первый замечательный предел

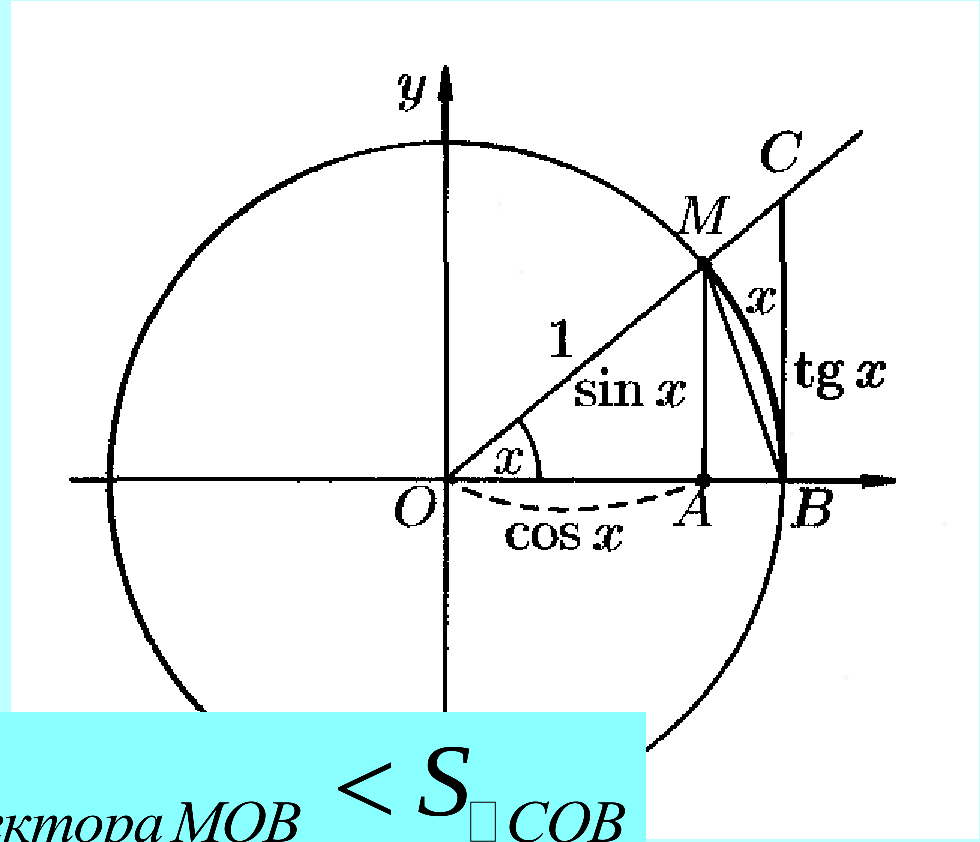
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$0<x<\frac{\pi}{2}$$

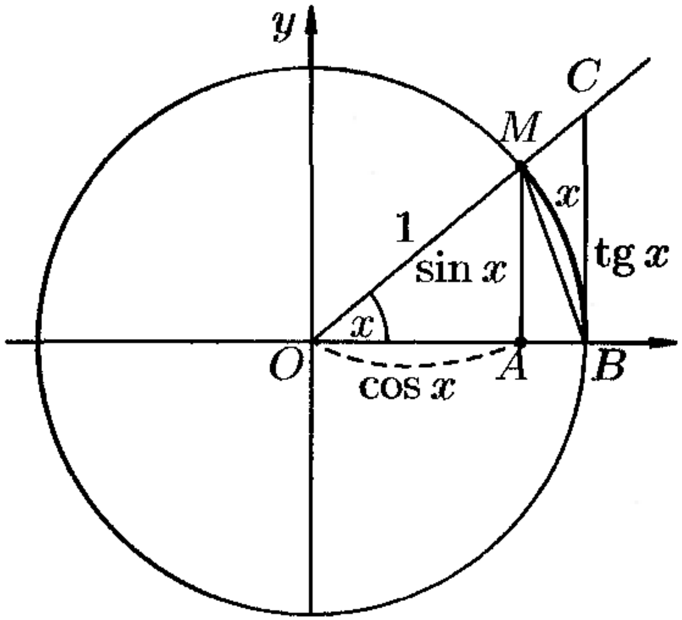
$$|AM|=\sin x,$$

$$\text{дуга } MB = x,$$

$$|BC|=\operatorname{tg} x$$



$$S_{\square MOB} < S_{\text{сектора}\, MOB} < S_{\square COB}$$



$$S_{\triangle MOB} < S_{\text{сектора}\, MOB} < S_{\triangle COB}$$

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x \qquad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1,\ \lim_{x\to 0}1 = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x>0)}}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$x < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{(-x)},\ -x > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x<0)}}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$3x = t \Rightarrow x \to 0\,,\ t \to 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{2\cdot\frac{t}{3}} = \lim_{t\to 0}\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin t}{t} =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e \qquad (1)$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e} \qquad (2)$$

1. $x \to +\infty$ $\quad$ $n \le x < n+1$ $\quad$ $n = [x]$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{n}, \qquad 1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{n}$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \qquad (3)$$

2. $x \to -\infty$ $\quad -x = t$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \cdot \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{1} = e\cdot 1$$

(4)

(3) , (4) $\rightarrow$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

$\alpha(x)-$ бесконечно малая функция

$$\boxed{\lim_{\alpha(x)\to 0}\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e} \qquad (5)$$

Пример 5. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{2x}$ $\left(1^{\infty}\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+3}{x+1}-1\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}\cdot\frac{2}{x+1}\cdot 2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right)^{\frac{2}{x+1}\cdot 2x}=$$

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{x+1}}=e^{4}$$

§6. Эквивалентные бесконечно малые функции

6.1. Сравнение бесконечно малых функций

$$\alpha(x),\ \beta(x) - \textit{б.м.ф.}\ \textit{при}\ x \to x_0$$

$$\alpha(x) + \beta(x) - \textit{б.м.ф.}\ \textit{при}\ x \to x_0$$

$$\alpha(x) \cdot \beta(x)\ - \textit{б.м.ф.}\ \textit{при}\ x \to x_0$$

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - ???$$

Определение 1. Если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A, A \neq 0, A = const,$$

то α и β называются *бесконечно малыми одного порядка*.

Определение 2. Если $\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$

то функция α называется *бесконечно малой более высокого порядка*, чем функция β.

Определение 3. Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$,

то функция α называется *бесконечно малой более низкого порядка* , чем функция β.

Определение 4. Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$,

то α и β называются *несравнимыми бесконечно малыми.*

$$x \to \pm\infty \,, \;\; x \to x_0 \pm 0$$

6.2. Эквивалентные бесконечно малые и основные теоремы о них

Определение 5. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$,

то функции α и β называются *эквивалентными бесконечно малыми.*

Записывают $\alpha \sim \beta$.

$$\sin x \sim x\ ,\ x \to 0 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\operatorname{tg} x \sim x\ ,\ x \to 0 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

Теорема 1. Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой.

$$\alpha \sim \alpha', \ \beta \sim \beta' \quad (x \to x_0) \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha'} \cdot \frac{\beta'}{\beta'} \right) = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\beta'}{\beta} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha'}{\beta'} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha'}{\beta'}$$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha'}{\beta'}}$$

Теорема 2. Разность двух эквивалентных бесконечно малых функций есть бесконечно малая более высокого порядка, чем каждая из них.

$$\alpha \sim \beta \quad при \;\; x \to x_0 \qquad \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = \lim_{x \to x_0} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) = 1 - \lim_{x \to x_0} \frac{\beta}{\alpha} = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha - \beta}{\beta} = 0$$

Теорема 3. Сумма конечного числа бесконечно малых функций разных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.

$$\alpha \to 0\,,\ \beta \to 0 \quad при \quad x \to 0, \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha + \beta}{\beta} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$\alpha + \beta \sim \beta \quad при \quad x \to x_0$$

Слагаемое, эквивалентное сумме бесконечно малых функций, называется *главной частью этой суммы*.

Замена суммы б.м.ф. ее главной частью называется *отбрасыванием бесконечно малых высшего порядка.*

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x+7x^2}$

$$\sin 3x \sim 3x\ ,\ 2x+7x^2 \sim 2x \quad \textit{при} \quad x\to 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x+7x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$$

6.3. Применение эквивалентных бесконечно малых функций

Вычисление пределов

$$\sin x \sim x\ ,\ x \to 0 \qquad \operatorname{tg} x \sim x\ ,\ x \to 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}=1\cdot 1=1$$

$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2} \quad \textit{при} \quad x \to 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{x}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{\frac{x}{2}(\sqrt{1+x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{(\sqrt{1+x}+1)}=1$$

$$\sqrt{1+x}-1 \ \square\ \frac{x}{2} \quad npu \quad x\to 0$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1\ ,$$

Записывают $\alpha \sim \beta$.

$$\sin x \sim x\ ,\ x\to 0 \qquad \operatorname{tg} x \sim x\ ,\ x\to 0$$

$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}\ ,\quad x\to 0$$

$$\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{x}{2}\ ,\quad x\to 0$$

$$3.\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$$

$$4.\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

$$5.\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m$$

1. $\sin x \sim x\,,\ x \to 0$

2. $\mathrm{tg}\, x \sim x\,,\ x \to 0$

3. $\arcsin x \sim x\,,\ x \to 0$

4. $\mathrm{arctg}\, x \sim x\,,\ x \to 0$

5. $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}\,,\ x \to 0$

6. $e^{x}-1 \sim x\,,\ \ x \to 0$

7. $a^{x}-1 \sim x \cdot \ln a\,,\ \ x \to 0$

8. $\ln(1+x) \sim x\,,\ \ x \to 0$

9. $\log_{a}(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}\,,\ \ x \to 0$

10. $(1+x)^{m}-1 \sim m \cdot x\,,\ \ x \to 0$

Пример 2. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}5x}{\sin 7x}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\sin 7x \sim 7x\ ,\ \operatorname{tg}5x \sim 5x \quad \textit{при}\quad x\to 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}5x}{\sin 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{7x}=\frac{5}{7}$$

Пример 3. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=$$

$$=\frac{2}{-1\cdot(1+1)}=-1$$

Пример 4. Найти предел $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\cos x}{\pi-2x}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\pi-2x}=\left\{\begin{aligned}&y=\pi/2-x\\&x=\pi/2-y\\&\pi-2x=\pi-\pi+2y\end{aligned}\right\}=\lim_{y\to 0}\frac{\cos(\pi/2-y)}{2y}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{2y}=\frac{1}{2}$$

Пример 5. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-4}{x-6}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Пример 6. Найти предел $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}\left(\frac{0}{0}\right)$

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)\left(x^2-5x+6\right)=$$

$$=(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)}=\boxed{-2}$$

Пример 7. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3x}{2x^2-1}\right)^{x+3}$ $\left(1^{\infty}\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x^2+3x}{2x^2-1}-1\right)^{4x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x+1}{2x^2-1}\right)^{4x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3x+1}{2x^2-1}\right)^{\frac{2x^2-1}{3x+1}}\right)^{\frac{3x+1}{2x^2-1}\cdot 4x+3}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^2+13x+3}{2x^2-1}}=$$

$$=e^6$$

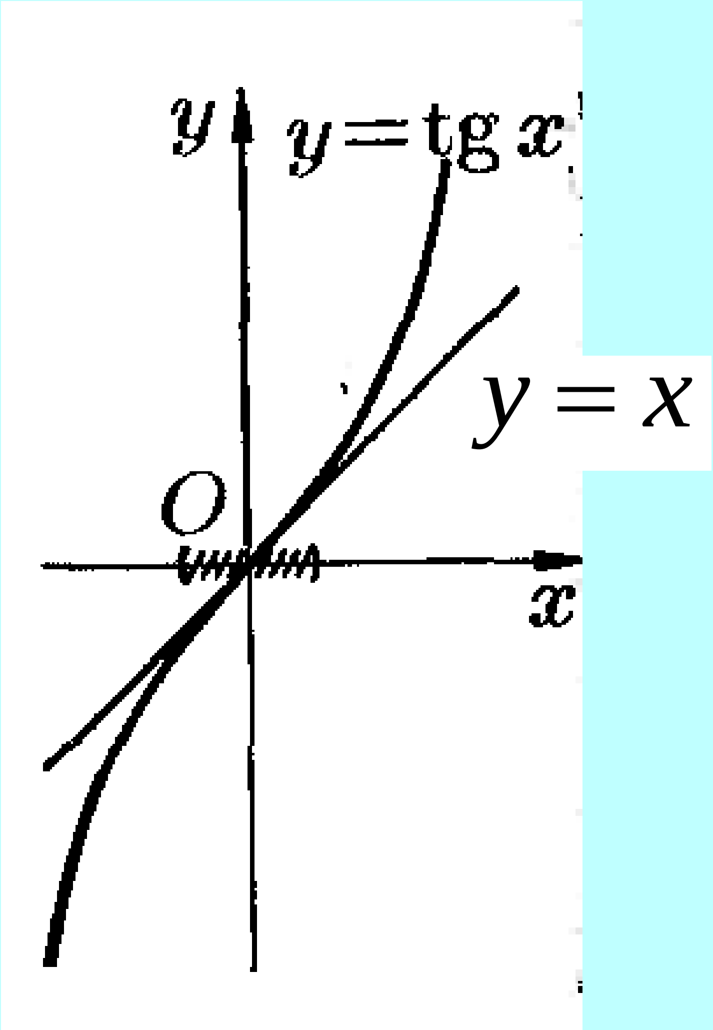
Приближенные вычисления

Если $\alpha \sim \beta$, то, отбрасывая в равенстве

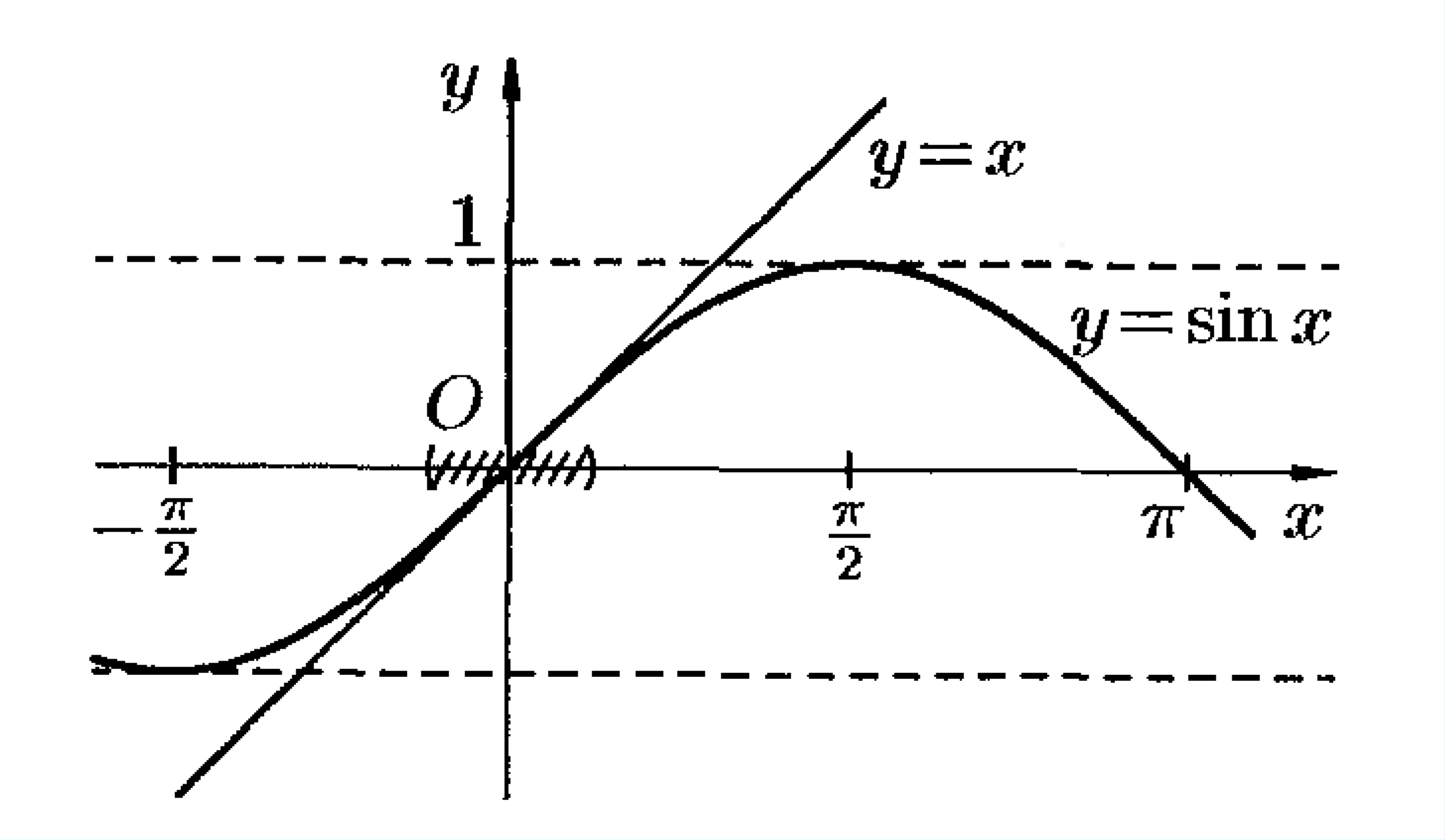
$$\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$$

бесконечно малую более высокого порядка, т.е. $\alpha - \beta$, получим приближенное равенство

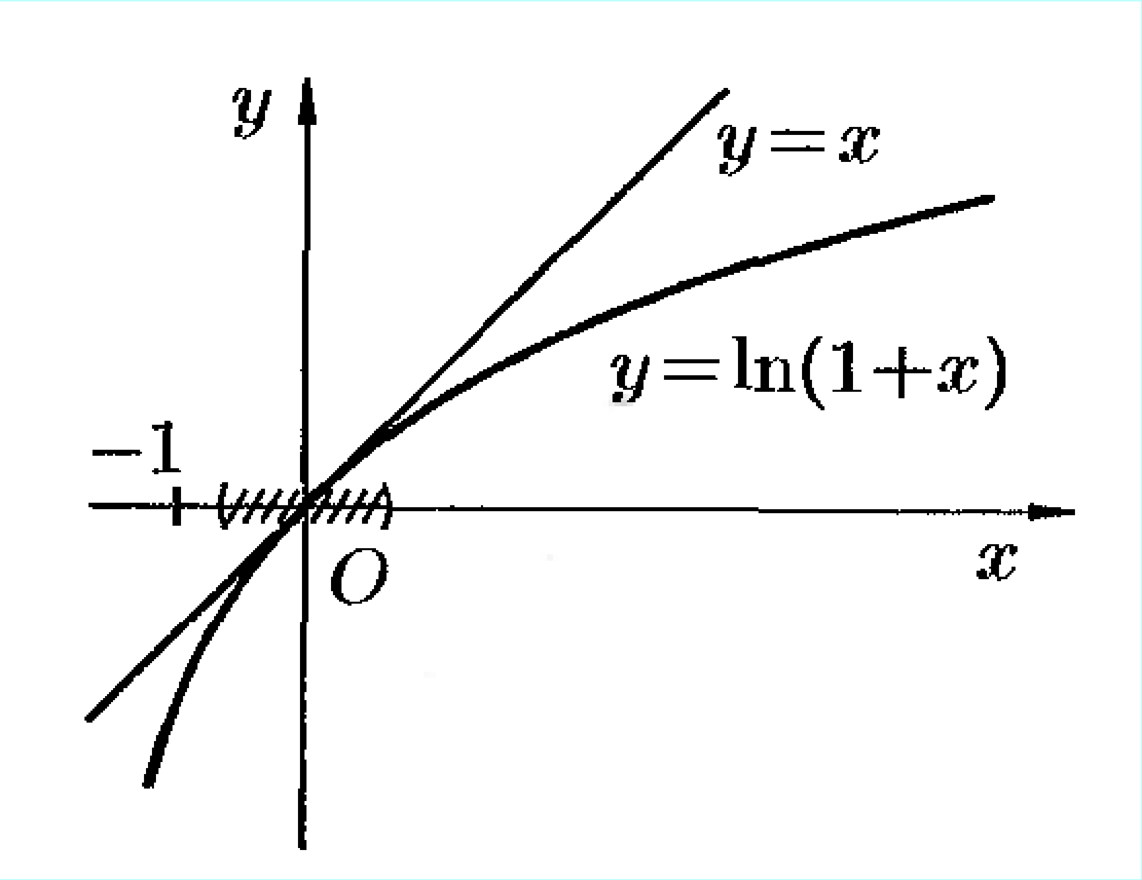
$$\alpha \approx \beta$$



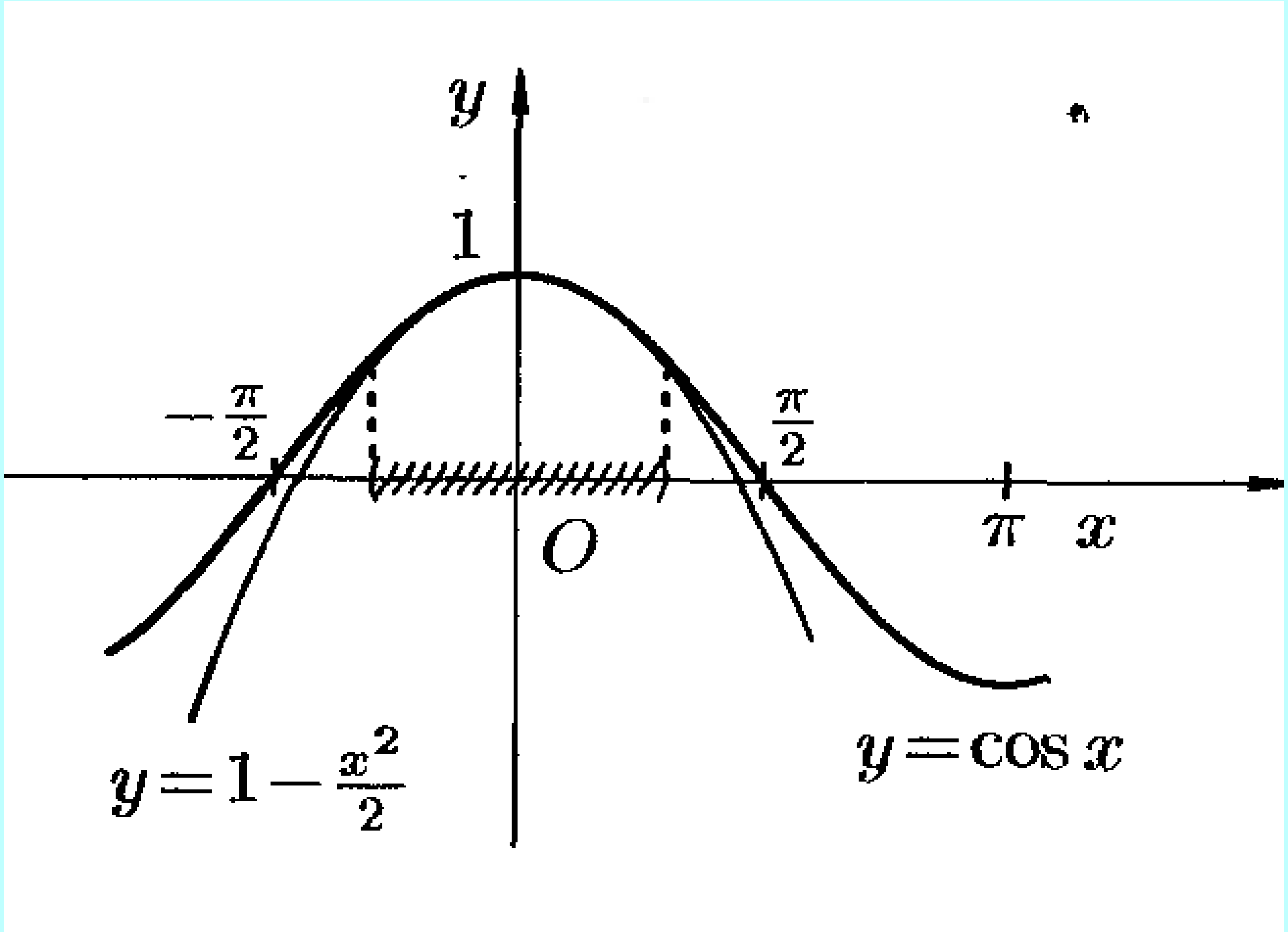
$$\operatorname{tg} x \approx x \quad (x \to 0)$$



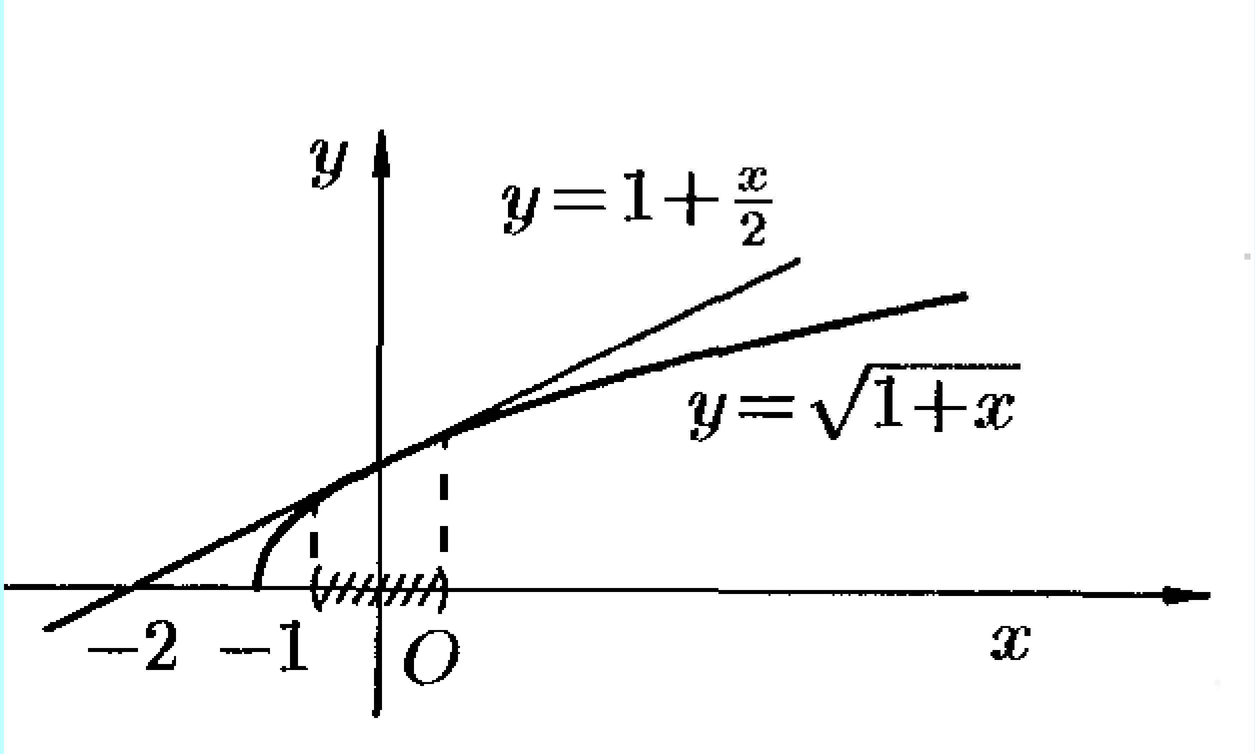
$$\sin x \approx x \ \left(x \to 0 \right)$$



$$\ln(1+x) \approx x \ (x \to 0)$$



$$\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2}\ \left(x\to 0\right)$$



$$\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}\,(x \to 0)$$