§7. Непрерывность функций

7.1. Непрерывность функции в точке

Пусть функция y=f(x), определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки.

Определение 1. Функция y=f(x), называется *непрерывной в точке* x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)} \qquad (1)$$

1) функция f(x) определена в точке x_0 и в ее окрестности;

2) функция f(x) имеет предел при $x \longrightarrow x_0$;

3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, т.е. выполняется равенство (1).

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0 \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x) = f\left(x_0\right) \qquad (2)$$

Это дает основание сформулировать следующее правило:

Если функция f(x) непрерывна в точке x_0, то при вычислении предела функции при x —> x_0,
надо вместо x в выражение f(x) подставить x_0. Полученное число и является пределом функции f(x) в точке x = x_0.

$$y = f(x),\ x \in (a;b) \qquad x_0 \in (a;b)$$

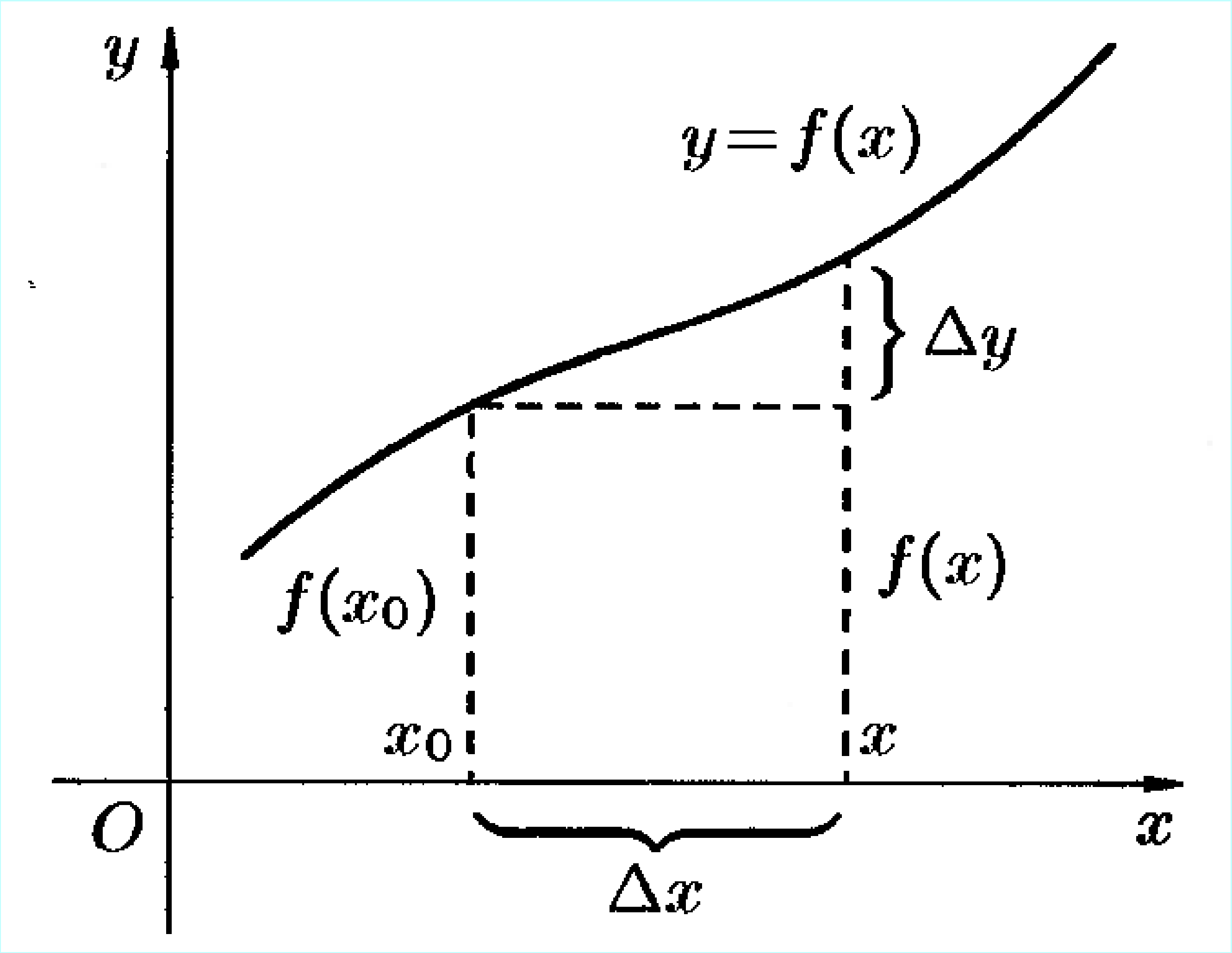
$$\Delta x = x - x_0 \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + \Delta x$$

Δx – приращение аргумента x в точке x_0

$$\Delta y = f(x) - f(x_0)$$

Δy – приращение функции f(x) в точке x_0

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$



y
y = f(x)
Δy
f(x₀)
f(x)
x₀
x
O
x
Δx

Определение 2. Функция называется непрерывной в точке x_0, если она определена в этой точке

и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.}$$

Пример 1. Исследовать на непрерывность функцию $y = \sin x$

$$\Delta y = \sin\left(x + \Delta x\right) - \sin\left(x\right) =$$

$$= 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$= 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \underbrace{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}_{\textit{ограничена}} \cdot \underbrace{\sin\frac{\Delta x}{2}}_{\textit{б.м.ф.}} = 0$$

$y = \sin x$ непрерывна в точке x.

Определение 3. Функция y=f(x) называется **непрерывной в интервале** $(a;b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Определение 4. Функция y=f(x) называется ***непрерывной на отрезке*** $[a;b]$, если она непрерывна в интервале $(a;b)$, и в точке $x=a$ ***непрерывна справа*** (т.е. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)$),

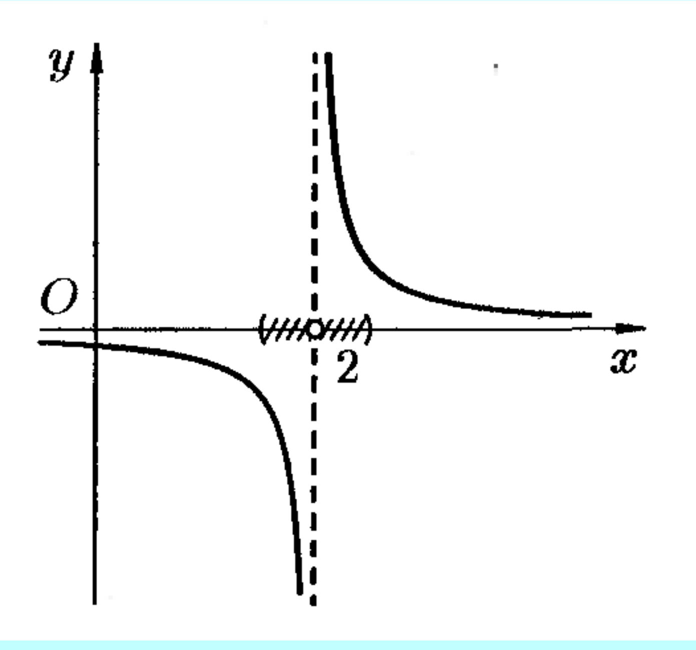
а в точке $x=b$ ***непрерывна слева*** (т.е. $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = f(b)$).

7.2. Точки разрыва и их классификация

Определение 5. Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются *точками разрыва этой функции*.

1. Функция f(x) определена в окрестности точки x_0 , но не определена в самой точке x_0 .

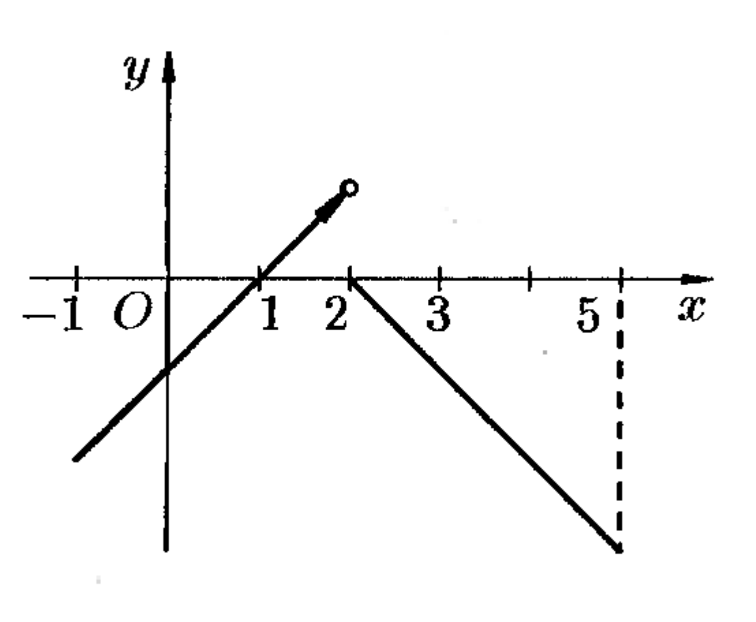
$$y = \frac{1}{x-2}$$



2. Функция f(x) определена в точке x_0 и ее окрестности, но не существует предела f(x) при $x \to x_0$.

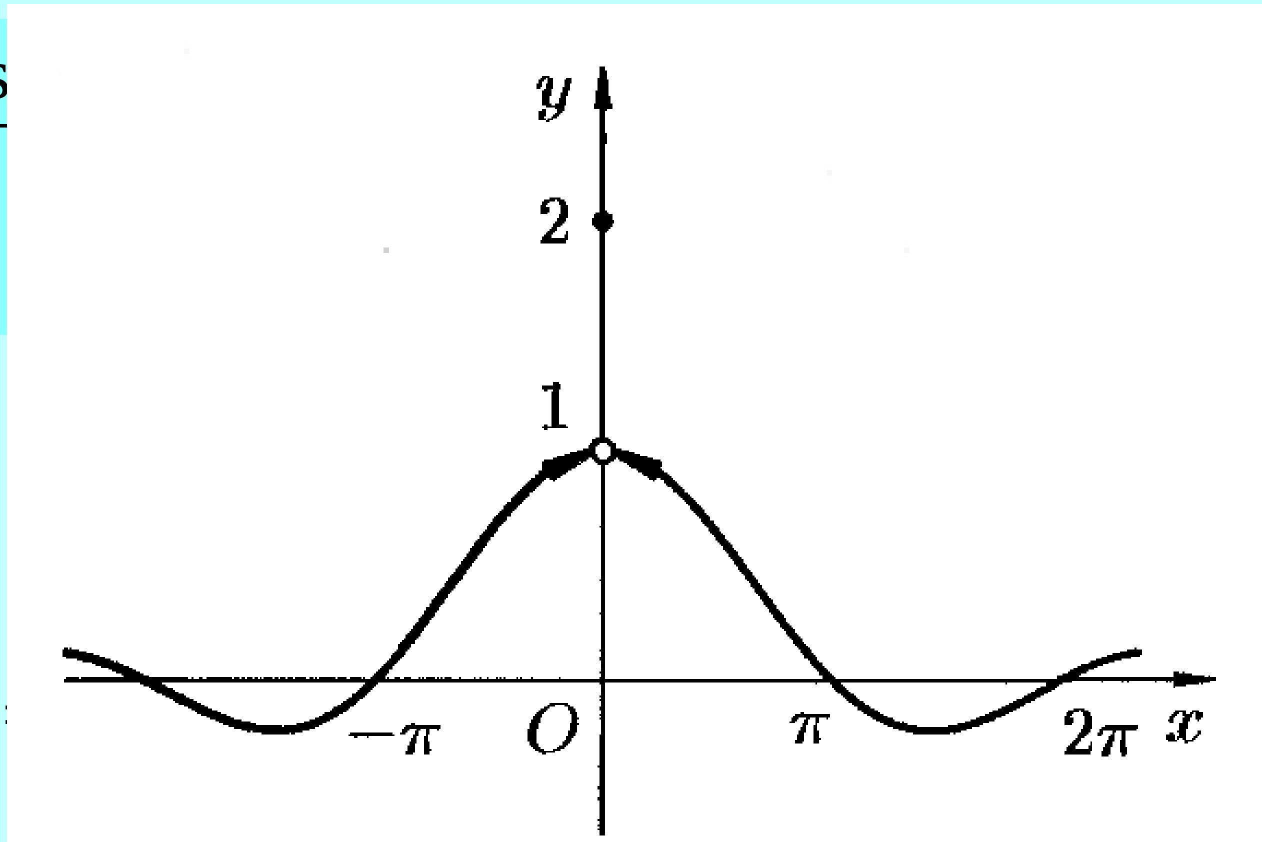
$$f(x)=\begin{cases} x-1\,,\ если\ -1\le x<2 \\ 2-x\,,\ если\ 2\le x\le 5 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}(x-1)=1 \qquad \lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}(2-x)=0$$



3. Функция f(x) определена в точке x_0 и ее окрестности, существует предел f(x) при $x \to x_0$, но $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

$f(x) = \begin{cases} \text{s} \\ 2 \end{cases}$



$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ … $= 2$

x_0 – точка разрыва

Определение 6. Точка разрыва x_0 называется *точкой разрыва первого рода*, если в этой точке функция f(x) имеет конечные пределы слева и справа (односторонние пределы), т.е.

$$\exists \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1 \quad и \quad \exists \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$$

$$\exists \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1 \quad и \quad \exists \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$$

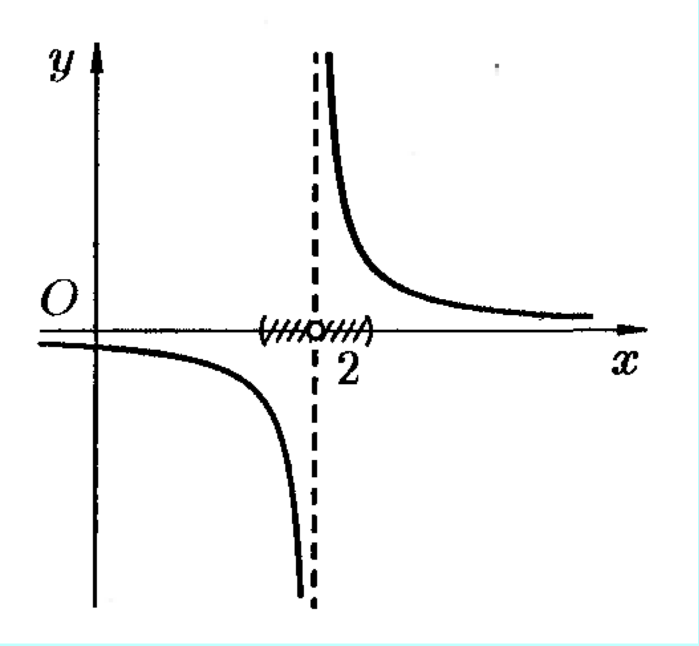
а) если $A_1 = A_2$, то точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва*;

b) если $A_1 \neq A_2$, то точка x_0 называется *точкой конечного разрыва.*

Величина $|A_1 - A_2|$ называется *скачок функции* в точке разрыва первого рода.

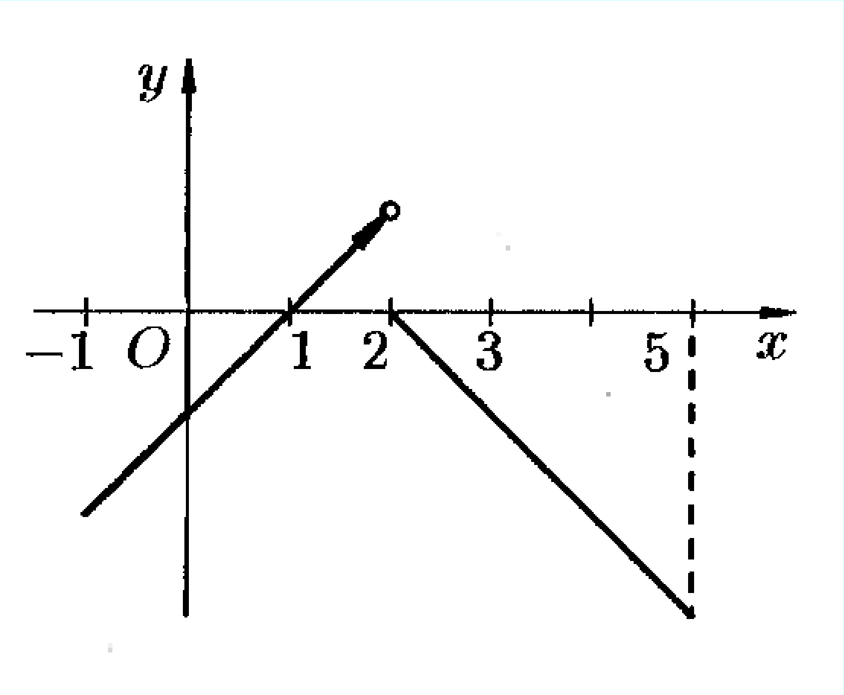
Определение 7. Точка разрыва x_0 называется *точкой разрыва второго рода*, если по крайней мере один из односторонних пределов в этой точке (слева или справа) не существует или равен бесконечности.

1) $y = \dfrac{1}{x-2}$



$x_0 = 2$ – точка разрыва второго рода

2) $f(x)=\begin{cases} x-1, \text{ если } -1\le x<2 \\ 2-x, \text{ если } 2\le x\le 5 \end{cases}$



$x_0 = 2$ – точка разрыва первого рода

скачок функции равен $|1-0| = 1$.

3) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{если } x\neq 0\\ 2, & \text{если } x=0\end{cases}$$

$x_0 = 0$ – точка устранимого разрыва

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{если } x\neq 0\\ 1, & \text{если } x=0\end{cases}$$

непрерывная функция

Пример функции, разрывной во всех точках

$$D(x)=\begin{cases}1, & x-\textit{рационально}\\0, & x-\textit{иррационально}\end{cases}$$

Функция Дирихле имеет во всех точках разрыв второго рода

7.3. Основные теоремы о непрерывных функциях. Непрерывность элементарных функций.

Теорема 1. Сумма, произведение и частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная

(для частного за исключением тех значений аргумента, в которых делитель равен нулю).

$$f(x)\,,\ g(x) \qquad F(x)=f(x)\cdot g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} F(x)=\lim_{x\to x_0}\Big(f(x)\cdot g(x)\Big)=$$

$$=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)\cdot g(x_0)=F(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0} F(x)=F(x_0)$$

Теорема 2. Пусть функция z=g(y) непрерывна в точке y_0, а функция y=f(x) непрерывна в точке $y_0=f(x_0)$.

Тогда сложная функция z=g(f(x)) непрерывна в точке x_0.

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \forall y : \quad \left| y - y_0 \right| < \delta \ \Rightarrow \right.$$

$$\left. \left| g(y) - g(y_0) \right| < \varepsilon \right)$$

$$\left(\ \forall \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \exists \delta_1 = \delta_1(\delta) > 0 \right.$$

$$\forall x: \quad |x - x_0| < \delta_1 \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \delta)$$

$$y_0 = f(x_0)$$

$$(\;\forall \varepsilon > 0\; \exists \delta_1(\varepsilon) > 0 \quad \forall x: \quad |x - x_0| < \delta_1 \;\Rightarrow$$

$$|g(y) - g(y_0)| = |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon)$$

$$z = g(f(x)) \qquad x_0$$

Теорема 3. (О непрерывности монотонной функции)

Пусть функция $y = f\left(x\right): X \subset R \to Y \subset R$

монотонна на промежутке X.

Если $f(X)=Y$ составляет промежуток, то функция y=f(x) непрерывна на промежутке X.

Все основные элементарные функции непрерывны при всех значениях х, для которых они определены.

Теорема 4. Всякая элементарная функция непрерывна в области своего определения.

1) Непрерывность арифметических действий

2) Непрерывность сложной функции

3) Непрерывность основных элементарных функций

7.4. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Теорема 3.

(Первая теорема Вейерштрасса).

Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке, т.е.

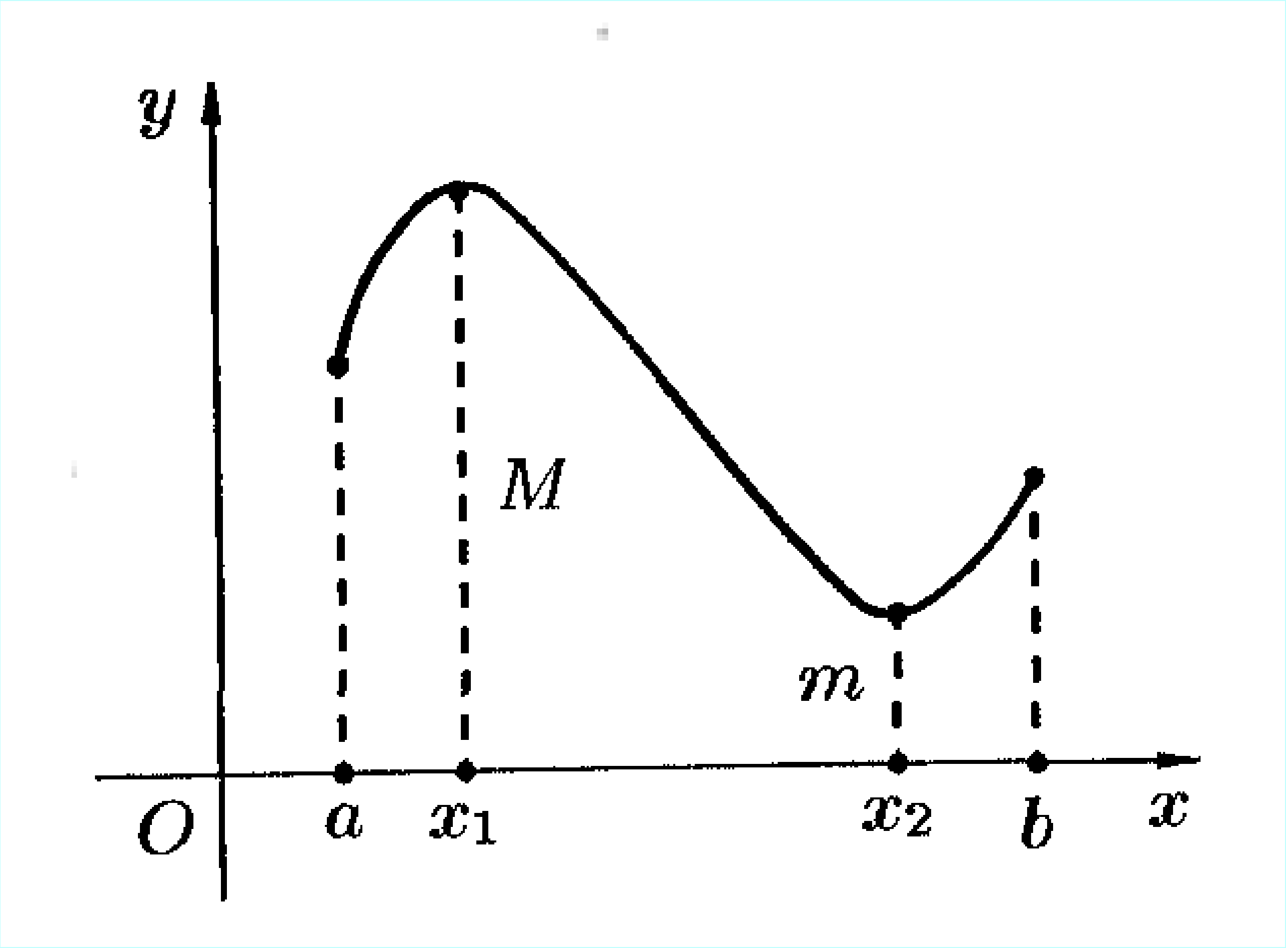
$$\forall x \in [\,a;b\,] \;\Rightarrow\; \left|\, f(x) \right| \le M$$

Теорема 4.

(Вторая теорема Вейерштрасса).

Если функция непрерывна на отрезке [a, b], то она принимает на нем свои наибольшее и наименьшее значения.

(Вейерштрасс Карл (1815-1897)- немецкий математик)).

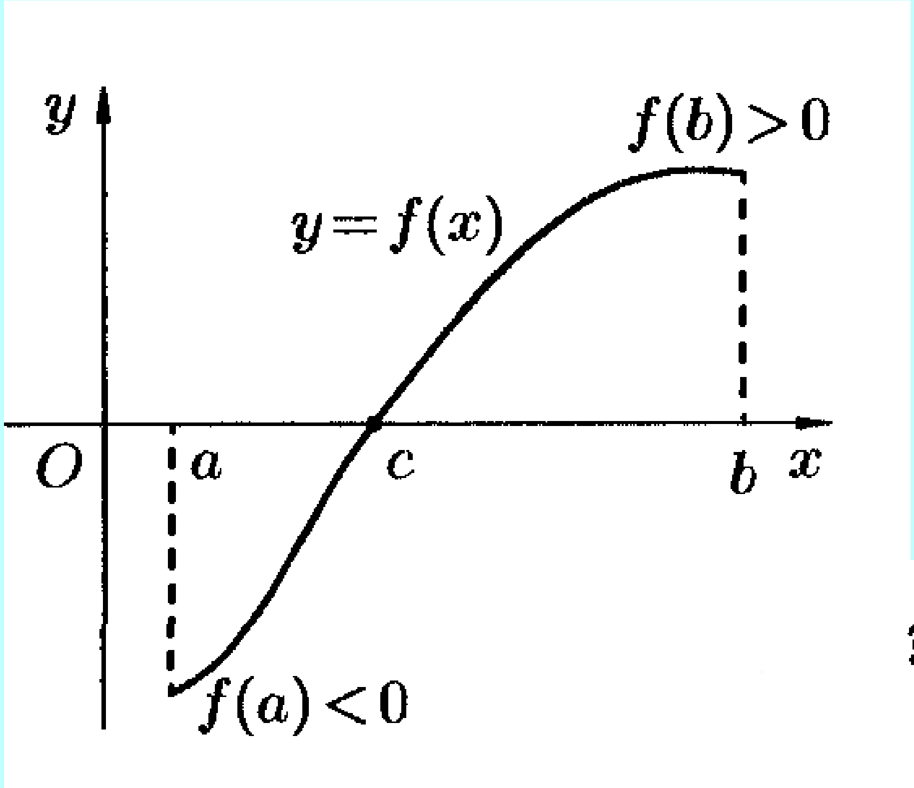


$$\forall x \in [a;b] \;\Rightarrow\; m \le f(x) \le M$$

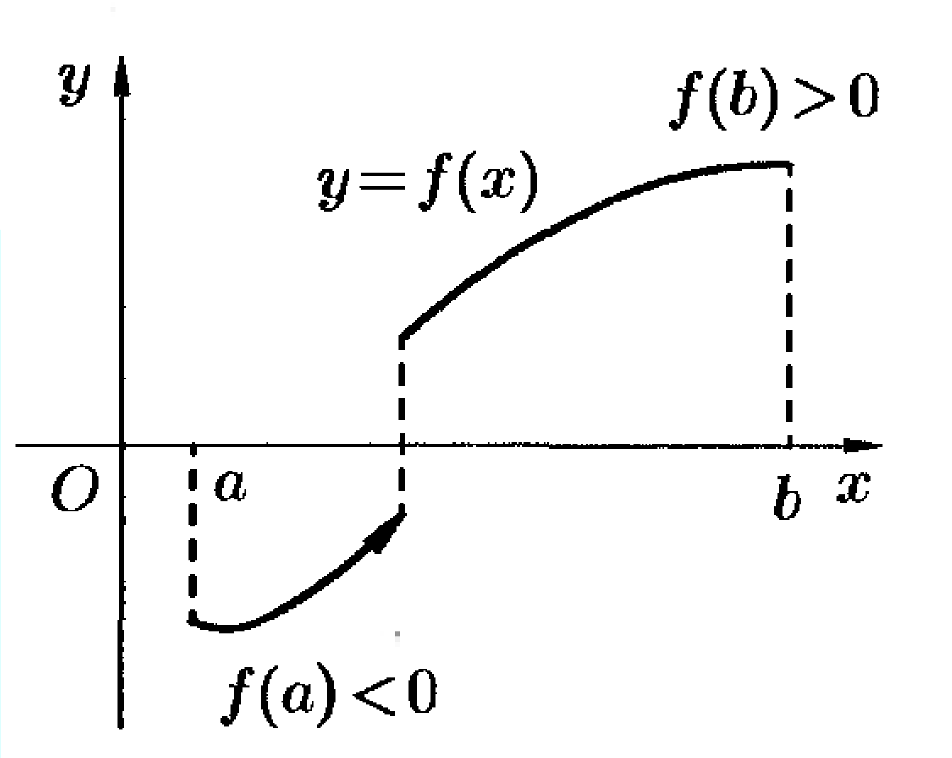
Теорема 5. (Первая теорема Больцано–Коши).

Если функция $f(x)$- непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков,

то внутри этого отрезка существует хотя бы одна такая точка, где $f(c) = 0$.



y
f(b)>0
y=f(x)
O
a
c
b
x
f(a)<0

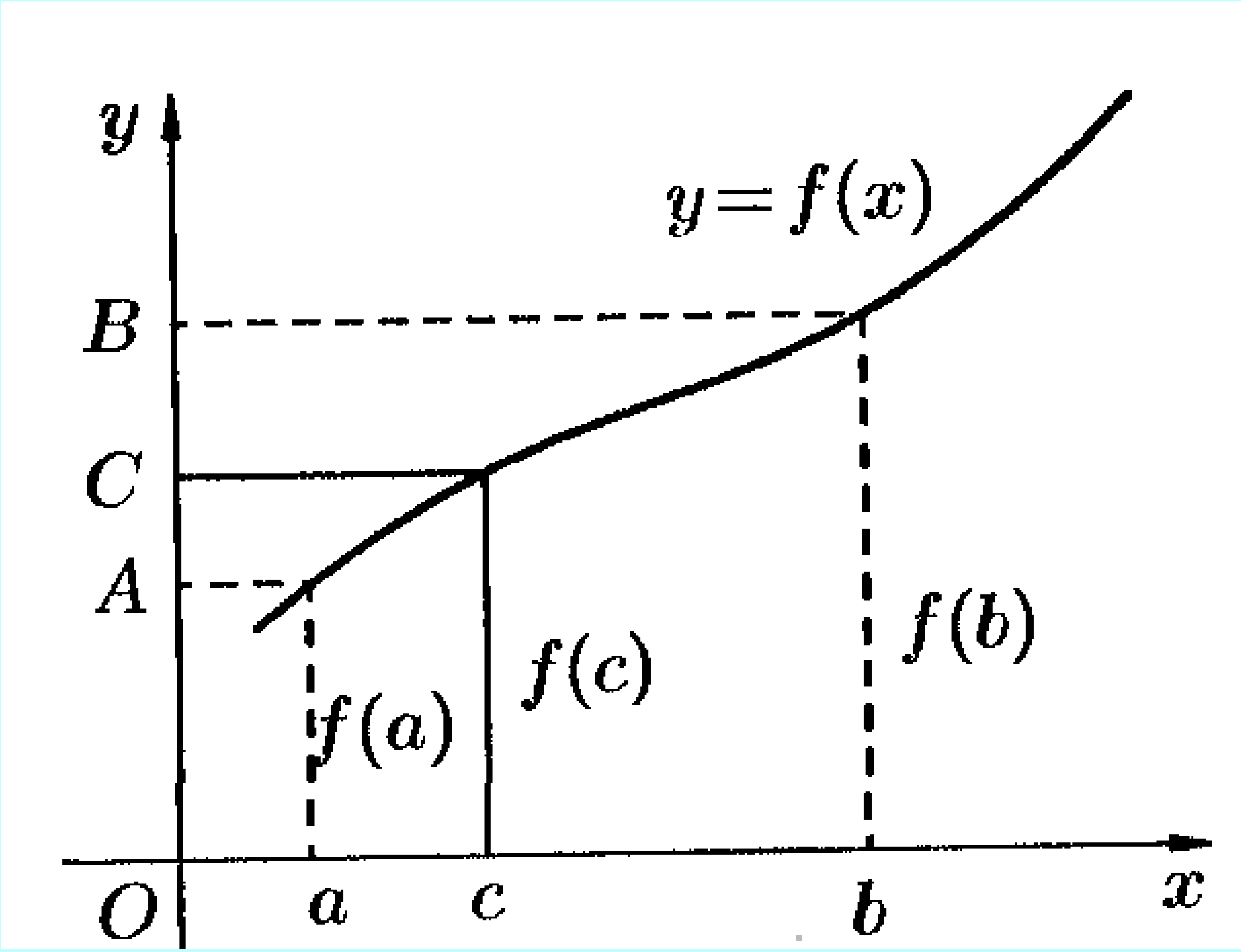


y
f(b)>0
y=f(x)
O
a
b
x
f(a)<0

Теорема 6. (Вторая теорема Больцано – Коши).

Если функция непрерывна на отрезке [a, b] и принимает на его концах неравные значения $f(a)=A$ и $f(b)=B$,

то на этом отрезке она принимает все промежуточные значения между A и B.



y
$y=f(x)$
B
C
A
$f(a)$
$f(c)$
$f(b)$
O
a
c
b
x

Пример 1. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они

$$f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1 \\ x^2+2, & -1\le x\le 1 \\ 2x, & x>1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1-0} f(x)=\lim_{x\to -1-0}(x+4)=3$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x)=\lim_{x\to -1+0}(x^2+2)=3$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}(x^2+2)=3$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}(2x)=2$$

в точке $x = -1$ функция непрерывна,
$x = 1$ – точка разрыва первого рода